

PETRE NĂCHILĂ

GEOMETRIE
PENTRU TOȚI

CLASA a VIII-a

Editura NOMINA

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele școlare în vigoare.

Editor: Alexandru Creangă
Imagine copertă: Mădălina Baracu

Pentru comenzi prin poștă: 0757.020.442
0348.439.417

Telefon	Zona
0741.488.918	Oltenia (Dolj, Gorj și Mehedinți), Banat și Transilvania (Alba și Hunedoara);
0748.111.247	Crișana și Transilvania (Sălaj, Cluj, Mureș, Harghita și Covasna);
0751.207.922	Oltenia (Vâlcea și Olt), Transilvania (Brașov și Sibiu) și Muntenia (Argeș, Teleorman și Giurgiu);
0757.020.443	Transilvania (jud. Bistrița-Năsăud) și zona Maramureș;
0746.200.413, 0769.221.685	Buzău, Bacău, Neamț, Suceava; Vrancea, Vaslui, Iași, Botoșani;
0744.429.512	Muntenia (Dâmbovița, Prahova, Brăila, Ialomița și Călărași), Dobrogea și jud. Galați;
0755.107.291, 0769.221.680, 0757.020.440	București

Punct de lucru: Loc. Bradu, DN 65B, nr. 31, jud. Argeș
e-mail: comenzi.nomina@gmail.com
www.edituranomina.ro
www.librarianomina.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

NĂCHILĂ, PETRE

Geometrie pentru toți : clasa a VIII-a / Petre Năchilă. - Pitești : Nomina, 2021

ISBN 978-606-535-854-6

51

Copyright © Editura Nomina, 2021
Toate drepturile aparțin Editurii Nomina.

CUPRINS

Capitolul 1. PUNCTE, DREPTE, PLANE

1.1. Puncte, drepte, plane. Determinarea drepte. Determinarea planului	5
1.2. Piramida.....	9
1.3. Prisma. Paralelipipedul dreptunghic. Cubul	14
1.4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu.....	18
1.5. Unghiul a două drepte în spațiu. Drepte perpendiculare	21
1.7. Dreapta perpendiculară pe plan. Distanța de la un punct la un plan. Înălțimea piramidei.....	28
1.8. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele. Înălțimea prisme	34
1.9. Secțiuni paralele cu baza. Trunchiul de piramidă.....	39
1.10. Probleme pentru concursurile școlare.....	46

Capitolul 2. PROIECȚII ORTOGONALE

2.1. Proiecții de puncte, segmente și drepte pe un plan.....	50
2.2. Unghiul unei drepte cu un plan. Lungimea proiecției unui segment	55
2.3. Teorema celor trei perpendiculare	61
2.4. Unghi diedru. Plane perpendiculare	68
2.5. Calculul unor distanțe și măsuri de unghiuri	75
2.6. Probleme pentru concursurile școlare.....	81

CAPITOLUL 3. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

3.1. Prisma dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic	85
3.2. Cubul	91
3.3. Prisma regulată	95
3.4. Piramida triunghiulară regulată. Tetraedrul regulat.....	101
3.5. Piramida patrulateră regulată.....	106
3.6. Piramida hexagonală regulată.....	111

3.7. Trunchiul de piramidă regulată.....	114
3.8. Cilindrul circular drept	123
3.9. Conul circular drept.....	128
3.10. Trunchiul de con circular drept	133
3.11. Sfera.....	139
3.12. Probleme pentru concursurile școlare.....	145
 Capitolul 4. EXTINDERI	
4.1. Tetraedrul echifacial, ortocentric, tridreptunghic	149
4.2. Poliedre și corpuri rotunde. sfera înscrisă. sfera circumscrisă.....	155
 SOLUȚII	159

Capitolul 1

PUNCTE, DREPTE, PLANE

1.1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei. Determinarea planului

Noțiunile elementare ale geometriei în spațiu sunt: punctul, dreapta, planul, spațiul, distanța și măsura unghiurilor. În geometria plană există un singur plan, iar în geometria în spațiu există mai multe plane. Spațiul se notează cu S .

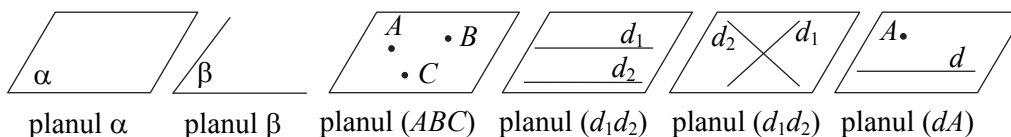
Punctul este pus în evidență prin reprezentările și/sau notațiile:



Dreapta este pusă în evidență prin reprezentările și/sau notațiile:



Planul este pus în evidență prin reprezentările și/sau notațiile:



AXIOMELE DE INCIDENTĂ în geometria în spațiu sunt următoarele:

1. Spațiul este o mulțime de puncte.
2. Dreptele și planele sunt submulțimi ale spațiului (notăm $d \subset S$, $\alpha \subset S$).
3. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte distincte. Orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare. Există patru puncte care nu aparțin aceluiași plan.
4. Prin orice două puncte distincte (A și B) trece o singură dreaptă (AB).
5. Orice trei puncte necoliniare (A , B , C) determină un plan unic (ABC).
6. Dacă două plane diferite au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă.

TEOREMA 1. Dacă o dreaptă are două puncte distincte situate într-un plan, atunci dreapta este conținută în plan.

TEOREMA 2. O dreaptă d și un punct $A \notin d$ determină un singur plan (notat (dA) sau (Ad)).

TEOREMA 3. Două drepte distincte d și d' cu un singur punct comun determină un plan unic (notat (dd')).

TEOREMA 4. Două drepte paralele d și d' determină un plan unic (notat (dd')).

- Observații.** 1. Spațiul are o infinitate de puncte.
2. Printr-o dreaptă trec o infinitate de plane.

Problemă rezolvată

Se consideră o figură geometrică $\mathcal{F}$ cu proprietatea că dreapta care trece prin două puncte ale figuri este conținută în figură. Demonstrați că figura geometrică este o dreaptă sau este un plan sau este tot spațiul.

Soluție. Figura $\mathcal{F}$ conține cel puțin două puncte distincte A, B și deci și dreapta AB . Dacă $\mathcal{F} \subset AB$, problema este demonstrată. Fie atunci un punct $C \in \mathcal{F} - AB$. Atunci tot planul $(ABC) \subset \mathcal{F}$. Dacă $\mathcal{F} \subset (ABC)$, problema este demonstrată. Dacă există $D \in \mathcal{F} - (ABC)$, fie un punct E situat în partea planului (ABC) care nu conține pe D . Avem $DE \cap (ABC) = \{N\}$ și deci $DE \subset \mathcal{F}$. Analog $\mathcal{F}$ conține și orice punct G situat de aceeași parte a planului (ABC) cu D și deci figura conține orice punct al spațiului.

Probleme propuse

*

- Justificați de ce medianele, bisectoarele, înălțimile și mediatoarele triunghiului ABC se află conținute în planul (ABC) .
- Fie dreptunghiul $ABCD$ și punctul $N \notin (ABC) = \alpha$. Determinați:
 - $(ACN) \cap \alpha$;
 - $(BCN) \cap \alpha$;
 - $(ACN) \cap (BDN)$.
- Fie patrulaterul convex $ABCD$ inclus în planul α și punctul $N \notin \alpha$. Câte plane distincte pot determina punctele A, B, C, D, N ?
- Fie punctele necoplanare A, B, C și D .
 - Scrieți câte trei drepte determinate de câte două din cele patru puncte.
 - Scrieți câte trei drepte determinate de câte două din aceste puncte care conțin punctul A .
 - Scrieți trei plane care au punctul comun B .
 - Scrieți trei drepte coplanare.
 - Scrieți trei drepte coplanare doar două câte două.
- Determinați numărul maxim de drepte determinate de n puncte din spațiu ($n \geq 2$).
- Determinați numărul maxim de plane determinate de n puncte din spațiu ($n \geq 3$).
- Fiind date 5 puncte în spațiu, determinați n minim, știind că dacă oricare n puncte sunt coliniare, atunci toate punctele sunt coliniare.

8. Fiind date 5 puncte în spațiu, determinați n minim, știind că dacă oricare n puncte sunt coplanare, atunci toate punctele sunt coplanare.

9. Fie punctele necoplanare M, N, P, R și punctele $A \in [MN], B \in [PR]$. Determinați $(APR) \cap (BNM)$.

10. Fie paralelogramele $ABCD$ și $CDEF$ situate în plane diferite. Determinați $(AEF) \cap (BDE)$.

**

11. Determinați numărul planelor care trec prin punctele A, B, C , dacă:

- a) $AB = 26$ cm, $BC = 24$ cm, $AC = 10$ cm;
- b) $AB = 13$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 21$ cm;
- c) $AB = 16$ cm, $BC = 9$ cm, $AC = 24$ cm;
- d) $AB = 8$ cm, $BC = 11$ cm, $AC = 20$ cm.

12. Câte plane distincte se pot forma cu punctele A, B, C, D , dacă $A \notin \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha, D \in \alpha, C \neq B, D \neq B$?

13. Fie triunghiul ABC și bisectoarele $(AD), (BE), (CF)$ și punctul $M \notin (ABC)$. Determinați intersecția planelor $(MAD), (MBE), (MBC)$.

14. Într-un plan α sunt punctele distincte A, B, C, D și fie punctul $M \notin \alpha$. Care este numărul minim de plane determinate de aceste puncte?

15. Demonstrați că, în figura 1, punctele R, S, T sunt coliniare.

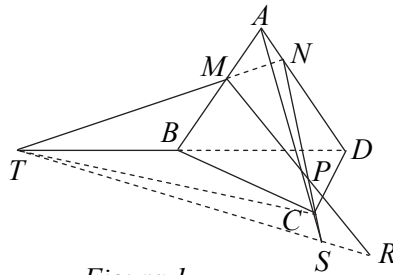


Figura 1

16. Fie punctele distincte A, B, C, D , iar E, F mijloacele segmentelor (AB) și (CD) . Demonstrați că, dacă $BC + AD = 2EF$, atunci toate punctele sunt coplanare.

17. Fie punctele necoplanare A, B, C, D și fie M, N, P, R mijloacele segmentelor $(AB), (BC), (CD), (DA)$. Demonstrați că planele $(ABP), (BCR), (CDM), (DAM)$ au un punct comun.

18. Fie dreapta d care nu este conținută în planul α . Câte elemente are mulțimea $d \cap \alpha$?
19. Demonstrați că, pentru orice plan α , există cel puțin un punct nesituat în α .
20. Fie dreptele AB și CD necoplanare. Demonstrați că AD și BC nu sunt coplanare.
21. Demonstrați că există două drepte care nu au puncte comune.
22. Fie trei drepte din spațiu, dintre care oricare două sunt secante. Demonstrați că dreptele sunt concurente sau secante.
23. Dacă mai multe drepte care nu trec prin același punct sunt concurente două câte două, atunci sunt coplanare.
24. Demonstrați că există cel puțin două plane care conțin o dreaptă dată.
25. Fie planul (ABC) și punctul $D \notin (ABC)$. Demonstrați că există trei triplete de puncte necoliniare și determinați $(DAB) \cap (DAC) \cap (DBC)$.
26. Fie două plane α și β . Demonstrați că există cel puțin o dreaptă care nu este situată în niciunul din cele două plane.
27. Demonstrați că spațiul coincide cu reuniunea tuturor dreptelor sale.
28. Demonstrați că spațiul coincide cu reuniunea tuturor planelor sale.
29. Se dau două drepte oarecare în spațiu și un punct nesituat pe ele. Demonstrați că există o dreaptă unică ce trece prin punctul dat și intersectează două drepte.
30. Se dau trei drepte oarecare în spațiu. Demonstrați că există o infinitate de drepte care intersectează simultan cele trei drepte.
31. Fie punctele necoliniare A, B, C și dreapta d care nu conține aceste puncte. Demonstrați că planele $(Ad), (Bd), (Cd)$ taie planul (ABC) după trei drepte concurente.
32. Fie punctele necoplanare A, B, C, D , iar E, F mijloacele segmentelor (AB) și (CD) . Demonstrați că $AC + BD > 2EF$.
33. Fie punctele necoliniare A, B, C și punctul $O \notin (ABC)$. Fie punctele $A' \in OA, B' \in OB, C' \in OC$ diferite de O, A, B, C și fie $BC \cap B'C' = \{A_1\}, AC \cap A'C' = \{B_1\}, AB \cap A'B' = \{C_1\}$. Demonstrați că punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare (**teorema lui Desargues**).

1.2. Piramida

DEFINIȚIE. Dacă $\mathcal{P} = A_1A_2\dots A_n$ ($n \geq 3$) este un poligon convex inclus în planul α , iar punctul $V \notin \alpha$, atunci reuniunea tuturor segmentelor $[VM]$, unde M aparține suprafeței poligonale $S = [A_1A_2\dots A_n]$ se numește **piramidă** de vârf V și baza S .

Denumiri:

- segmentele $[VA_i]$, $i = \overline{1, n}$, se numesc **muchiile laterale** ale piramidei;
- punctele $A_1, A_2, \dots, A_n$ se numesc **vârfurile bazei** piramidei;
- $[VA_1A_2], [VA_2A_3], \dots, [VA_nA_1]$ se numesc **fețele laterale**;
- distanța de la V la planul α se numește **înălțimea** piramidei.

Aria laterală: $A_l = A_{VA_1A_2} + A_{VA_2A_3} + \dots + A_{VA_nA_1}$

Aria totală: $A_t = A_l + A_{A_1A_2\dots A_n}$

În funcție de numărul muchiilor bazei, piramida se numește: triunghiulară ($n = 3$) (fig. 2), patrulateră ($n = 4$) (fig. 3), pentagonală ($n = 5$) (fig. 4), hexagonală ($n = 6$) (fig. 5) etc.

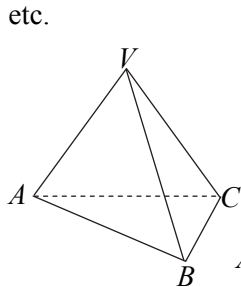


Fig. 2

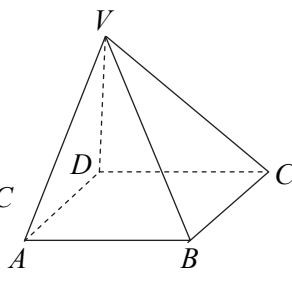


Fig. 3

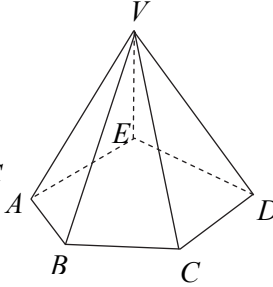


Fig. 4

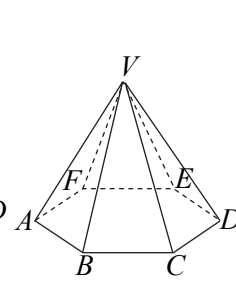


Fig. 5

Tetraedrul ($VABC$) este determinat de patru puncte necoplanare numite vârfuri. Are patru vârfuri și patru fețe (care sunt triunghiuri). Fața pe care este așezat se numește **bază**. Oricare față poate fi bază.

În figura 6 avem desfășurarea piramidei $VABC$ (se secționează piramida după muchiile VA, VB, VC și rabatăm fețele $(VAB), (VAC), (VBC)$ până devin coplanare cu baza ABC). În figura 7 avem desfășurarea tetraedrului regulat (tetraedru cu toate muchiile congruente $(AB) \equiv (BC) \equiv (CA) \equiv (VA) \equiv (VB) \equiv (CV)$, adică toate fețele sunt triunghiuri echilaterale).

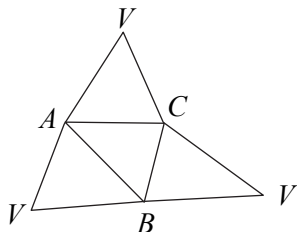


Fig. 6

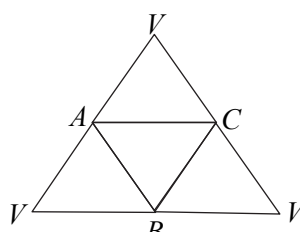


Fig. 7

Piramida regulată este piramida cu toate muchiile laterale congruente și baza poligon regulat (fețele laterale sunt triunghiuri isoscele). Piciorul înălțimii coincide cu centrul cercului circumscris bazei. Înălțimea unei fețe laterale a unei piramide regulate se numește **apotema** piramidei (VM) în figura 8.

În piramida regulată avem:

$$AB = AC = BC \neq VA = VB = VC.$$

În piramida regulată avem $A_l = \frac{n \cdot l \cdot a_p}{2}$, unde $VA = m$, $AB = l$, $VM = a_p$. Aici

„lucram” cu următoarele triunghiuri dreptunghice: ΔVOA , ΔVOM , ΔVMB .

Pentru orice poliedru convex (în particular și pentru orice piramidă) avem **relația lui Euler**: $v + f = m + 2$, unde v, f, m reprezintă numărul de vârfuri, fețe, respectiv muchii.

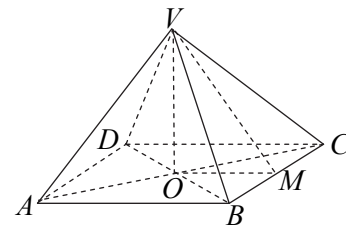


Fig. 8

Probleme rezolvate

1. Se numește **bimediană** într-un tetraedru segmentul de dreaptă care unește mijloacele a două muchii opuse. Se numește **mediană** într-un tetraedru segmentul de dreaptă care unește un vârf cu centrul de greutate al feței opuse. Demonstrați că:

- în orice tetraedru, bimedianele sunt concurente (în punctul G);
- în orice tetraedru, medianele sunt concurente (în punctul G');
- în orice tetraedru, avem $G = G'$.

Soluție. Fie tetraedrul $ABCD$ și M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor (AB) , (BC) , (CD) , (DA) , (BD) , respectiv (AC) (figura 9). Segmentele (MP) , (NQ) , (RS) sunt bimediane. Fie G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor (BCD) , (ABC) , (ACD) , respectiv (ABD) . Segmentele AG_1, DG_2, BG_3, CG_4 sunt mediane.

a) Cum (NP) și (MQ) sunt linii mijlocii în ΔBCD , respectiv ΔABD , avem $NP \parallel BD \parallel MQ$, $NP = MQ = \frac{1}{2}BD$.

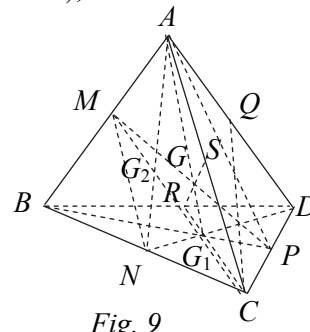


Fig. 9

Deci, $MNPQ$ este paralelogram și atunci MP și NQ se intersectează în punctul G (mijlocul lor). Analog $NRQS$ este paralelogram și atunci $G \in RS$ este mijlocul lui (RS) .

b) Avem $MP \cap NQ = \{G\}$ în planul (MNP) și $AG \cap BP \neq \emptyset$ în planul (ABP) . Deci, dreptele MP, NQ, AG_1 se intersectează două câte două și nu sunt coplanare. Cum $P \in (MNP) \cap (ABP)$, cele două plane au o dreaptă comună și $G \in AG_1$. Analog $G \in DG_2, G \in BG_3, G \in CG_4$.

DEFINIȚIE. Punctul G este centrul de greutate al tetraedrului.

2. Fie punctul A și dreapta d cu $A \notin d$. Demonstrați că toate dreptele d' care conțin punctul A și intersectează dreapta d sunt coplanare.

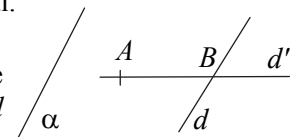


Fig. 10